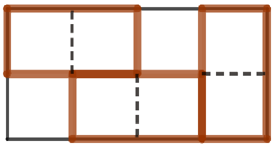
Tournoi 2018 (corrigé collège)

Les places sont prises

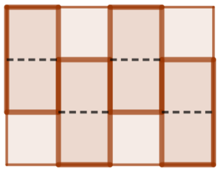
Sur cette grille de 2×4 cases on a placé sans chevauchement trois dominos, chaque domino recouvrant exactement deux cases, de façon qu'on ne puisse plus en placer un autre. Trois est le minimum car si on place seulement deux dominos il reste de la place pour en poser un troisième.



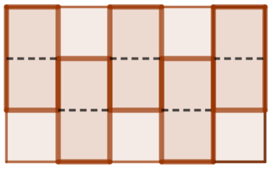
Combien faut-il placer de dominos au minimum sur une grille de 3×4 cases pour que l'on ne puisse plus en placer un autre ? Les dominos doivent être placés sans chevauchement, chaque domino recouvrant exactement deux cases.

Même question sur une grille de 3×5 cases, de 4×4 cases.

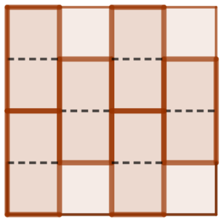
Pour une grille 3×4 il faut au moins 4 dominos. En effet une solution avec seulement 3 dominos laisserait 6 cases vides, pas deux côte à côte. Il faudrait alors placer ces 6 cases en damier mais cela ne permet pas de placer 3 dominos.



Pour une grille 3×5 il en faut au moins 5. En effet une solution avec seulement 4 dominos laisserait 7 cases vides, pas deux côte à côte. Il faudrait alors placer ces 7 cases en damier mais cela ne permet pas de placer 4 dominos.

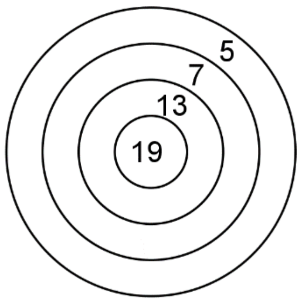


Pour une grille 4×4 il en faut au moins 6. En effet une solution avec seulement 5 dominos laisserait 6 cases vides, pas deux côte à côte. Il faudrait alors placer ces 6 cases en damier mais cela ne permet pas de placer 5 dominos.



Avec de l'adresse

Robin est un passionné de tir à l'arc. Il possède une cible dessinée ci-contre. Robin est très fort et ne rate jamais sa cible. À chaque lancer de flèche il remporte le nombre de points inscrit dans la zone atteinte.



1) Il dispose de 2 flèches. Quels sont les différents nombres de points qu'il peut obtenir ?

Si le plus petit nombre est égal à 5 le total peut être 5 + 5 = 10, 5 + 7 = 12, 5 + 13 = 18 ou 5 + 19 = 24.
Si le plus petit nombre est égal à 7 le total peut être 7 + 7 = 14, 7 + 13 = 20 ou 7 + 19 = 26.
Si le plus petit nombre est égal à 13 le total peut être 13 + 13 = 26 ou 13 + 19 = 32.
Si le plus petit nombre est égal à 19 le total est 19 + 19 = 38.
Il peut donc obtenir les 9 nombres de points suivants : 10, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 32 et 38.

2) Robin dispose d'autant de flèches qu'il le souhaite. Quels sont les nombres de points qu'il ne peut pas obtenir ?

Il peut obtenir tous les multiples de 5 donc les entiers de la forme <u>5k</u>.
Il peut obtenir 7 donc, en ajoutant des 5, tous les entiers de la forme 7 + 5k, ou encore tous les entiers de la forme <u>5k + 2</u> à l'exception de 2.

Il peut obtenir 13 donc, en ajoutant des 5, tous les entiers de la forme 13 + 5k, ou encore tous les entiers de la forme <u>5k + 3</u> à l'exception de 3 et 8.
Il peut obtenir 14 = 7 + 7 donc, en ajoutant des 5, tous les entiers de la forme 14 + 5k, ou encore tous les entiers de la forme <u>5k + 4</u> à l'exception de 4 et 9.
Il peut obtenir 21 = 7 + 7 + 7 donc, en ajoutant des 5, tous les entiers de la forme 21 + 5k, ou encore tous les entiers de la forme <u>5k + 1</u> à l'exception de 1, 6, 11 et 16.
Comme un nombre entier s'écrit soit 5k, soit 5k+1, soit 5k+2, soit 5k+3, soit 5k+4, il peut obtenir tous les nombres de points à l'exception des 9 nombres : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11 et 16.

3) Robin dispose d'autant de flèches qu'il le souhaite. Combien lui faut-il au minimum de flèches pour obtenir exactement 2018 points ?
Chaque nombre de la cible étant impair il faut un nombre pair de flèches pour obtenir 2018.
On calcule 106 × 19 = 2014 donc 106 flèches ne permettent pas d'atteindre 2018, il en faut au moins 108.
On peut obtenir 2018 avec 108 flèches : 105 × 19 + 1 × 13 + 2 × 5 = 2018 et 105 + 1 + 2 = 108.

Bien divisibles

1) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre, tels que l'entier formé par les 2 premiers chiffres de N, en commençant par la gauche, est divisible par 2 et N est divisible par 3 ?

L'entier formé par les 2 premiers chiffres de N étant divisible par 2, son chiffre des unités est pair et ne peut donc être que 2. Il reste deux possibilités pour N, 123 et 321, et elles conviennent puisque ces deux nombres sont divisibles par 3.

2) Existe-t-il un entier N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que, en commençant par la gauche, l'entier formé par les 2 premiers chiffres de N est divisible par 2, l'entier formé par les 3 premiers chiffres de N est divisible par 3 et N est divisible par 4 ?

Pour la même raison que précédemment le deuxième chiffre de N doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Puisque N doit être divisible par 4 son chiffre des unités doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Il y a quatre possibilités pour N : 1234 et 3214 ne conviennent pas car ils ne sont pas divisibles par 4 ; 1432 et 3412 ne conviennent pas non plus car l'entier formé par les 3 premiers chiffres n'est pas divisible par 3. Il n'y a donc pas de solution.

3) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que, en commençant par la gauche, l'entier formé par les 2 premiers chiffres de N est divisible par 2, l'entier formé par les 3 premiers chiffres de N est divisible par 3, l'entier formé par les 4 premiers chiffres de N est divisible par 4, l'entier formé par les 5 premiers chiffres de N est divisible par 5 et N est divisible par 6 ?

Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième et sixième chiffres de N doivent être pairs.
Le cinquième chiffre est nécessairement 5 car un entier divisible par 5 a son chiffre des unités égal à 0 ou 5.
Il y a donc deux possibilités : N = 1*3*5* ou N = 3*1*5* où chaque * représente un chiffre pair (2, 4 ou 6).
Comme 143, 163, 341 et 361 ne sont pas divisibles par 3 les trois premiers chiffres de N sont 123 ou 321.
Comme 1234 et 3214 ne sont pas divisibles par 4 les quatre premiers chiffres de N sont 1236 ou 3216.
Les deux entiers N=123654 et 321654 conviennent puisqu'ils sont divisibles par 6.

Avec des seaux

1) Claire va à la fontaine pour chercher de l'eau. Elle dispose uniquement de deux seaux (sans graduations), un de 9 litres et un de 11 litres.

Elle veut savoir exactement ce que contient chaque seau. Quand elle remplit un seau à la fontaine, elle le remplit entièrement. Quand elle verse un seau dans l'autre elle s'arrête soit quand le seau qu'elle verse est vide, soit quand l'autre est plein. Elle peut aussi vider complètement un seau.

Par exemple elle peut remplir le seau de 11 L, puis avec ce seau elle remplit le petit. Il reste alors 2 L dans le grand seau. Ensuite elle peut vider complètement le petit seau, puis verser les 2 L du grand seau dans le petit seau, puis remplir à nouveau le grand. Elle obtient au total 2 + 11 = 13 L. Elle peut continuer en remplissant le petit seau avec le grand.

On peut représenter ces différentes étapes dans un tableau :

Seau de 9L	*0*	*0*	*9*	*0*	*2*	*2*	*9*	…
Seau de 11L	*0*	*11*	*2*	*2*	*0*	*11*	*4*	…

Montrez qu'elle peut mesurer avec ses deux seaux tous les nombres entiers de litres de 1 L jusqu'à 20 L.

Claire peut poursuivre le tableau avec le même principe : elle remplit le seau de 11 L, puis avec ce seau elle remplit le petit. Ensuite elle vide complètement le petit seau, puis elle verse le contenu du grand seau dans le petit seau, puis elle recommence. Elle obtient successivement :

Seau de 9 L	0	9	0	2	2	9	0	4	4	9	0	6	6	9	0	8	8	9	0
Seau de 11 L	11	2	2	0	11	4	4	0	11	6	6	0	11	8	8	0	11	10	10
Total	11	11	2	2	13	13	4	4	15	15	6	6	17	17	8	8	19	19	10

Seau de 9 L	9	0	1	1	9	0	3	3	9	0	5	5	9	0	7	7	9	0	9	9
Seau de 11 L	1	1	0	11	3	3	0	11	5	5	0	11	7	7	0	11	9	9	0	11
Total	10	1	1	12	12	3	3	14	14	5	5	16	16	7	7	18	18	9	9	20

Claire a bien obtenu tous les nombres de litres de 1 L à 20 L.

2) Son amie Chloé dispose de trois seaux de 6 L, 10 L et 15 L. Elle procède comme Claire : elle peut remplir un seau à la fontaine ou le vider entièrement. Elle peut aussi verser un seau dans un autre en s'arrêtant soit quand le seau qu'elle verse est vide, soit quand le seau qu'elle remplit est plein.

Expliquez comment elle peut faire pour obtenir 1 L dans l'un des trois seaux.

Voici un tableau représentant les différentes étapes pour obtenir 1 L. Elle remplit le seau de 10 L, puis le verse dans celui de 15 L. Elle remplit ensuite le seau de 6 L puis avec ce seau elle complète le seau de 15 L. Il reste alors 1 L dans le seau de 6 L.

Seau de 6 L	0	0	0	6	1
Seau de 10 L	0	10	0	0	0
Seau de 15 L	0	0	10	10	15